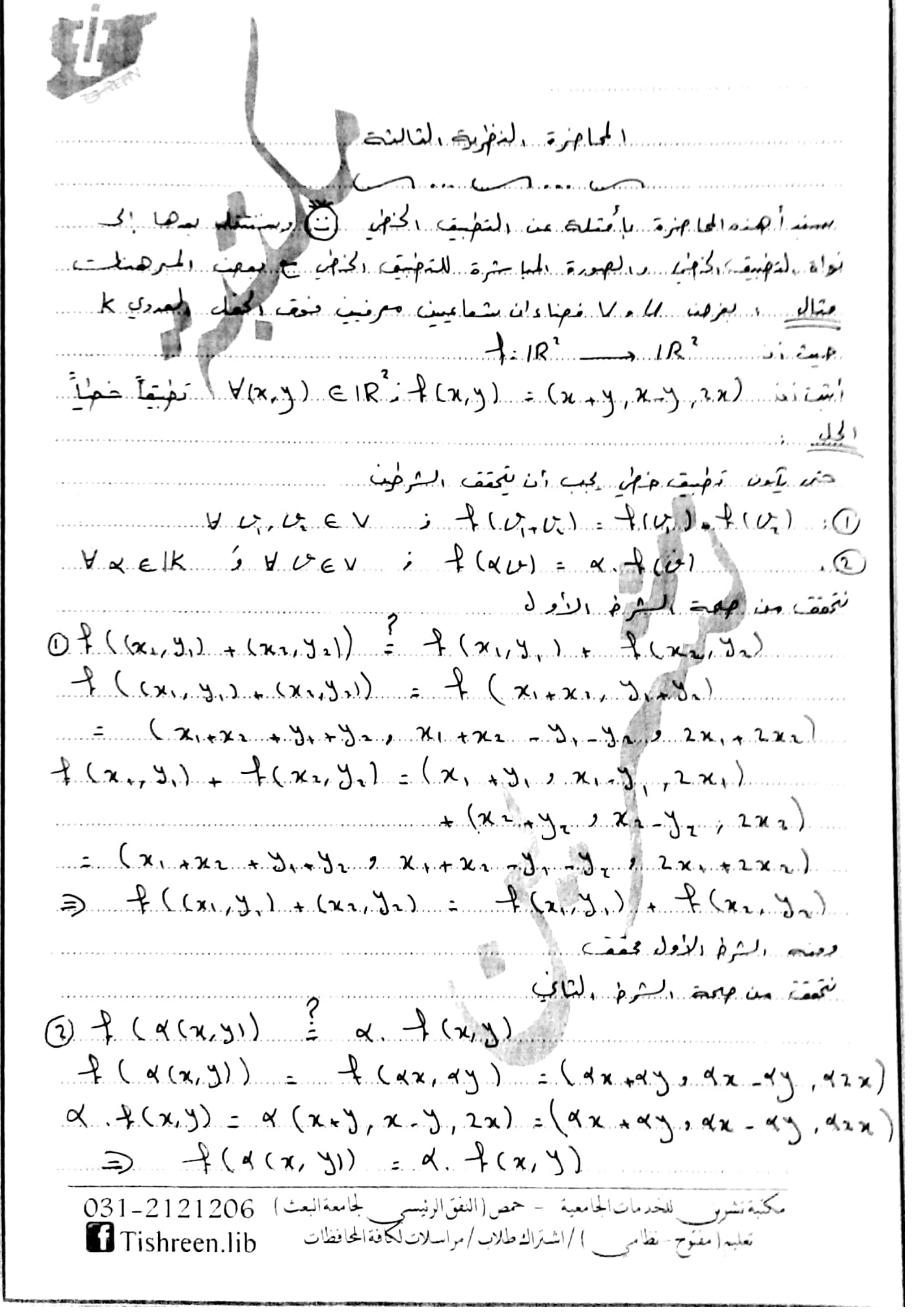


المحاضرة النظرية الثالثة

سـ ... سـ ... سـ

بدأنا هذه المحاضرة بأمثلة عن التطبيق الخطي 🙂 وسننتقل بعدها إلى نواة التطبيق الخطي والصورة المباشرة للتطبيق الخطي مع بعض المبرهنات

مثال: ليكن U و V فضاءان شعاعيان معرفين فوق الحقل العددي K

حيث أن: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

أثبت أن: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$ تطبيقاً خطياً

الحل:

حتى يكون تطبيق خطي يجب أن يتحقق الشرطين

① : $\forall v_1, v_2 \in V \; ; \; f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

② : $\forall \alpha \in K$ و $\forall v \in V \; ; \; f(\alpha v) = \alpha . f(v)$

نتحقق من صحة الشرط الأول

① $f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \overset{?}{=} f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2)$

$= (x_1+x_2+y_1+y_2 \, , \, x_1+x_2-y_1-y_2 \, , \, 2x_1+2x_2)$

$f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) = (x_1+y_1 \, , \, x_1-y_1 \, , \, 2x_1)$

$+ (x_2+y_2 \, , \, x_2-y_2 \, , \, 2x_2)$

$= (x_1+x_2+y_1+y_2 \, , \, x_1+x_2-y_1-y_2 \, , \, 2x_1+2x_2)$

$\Rightarrow f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

ومنه الشرط الأول محقق

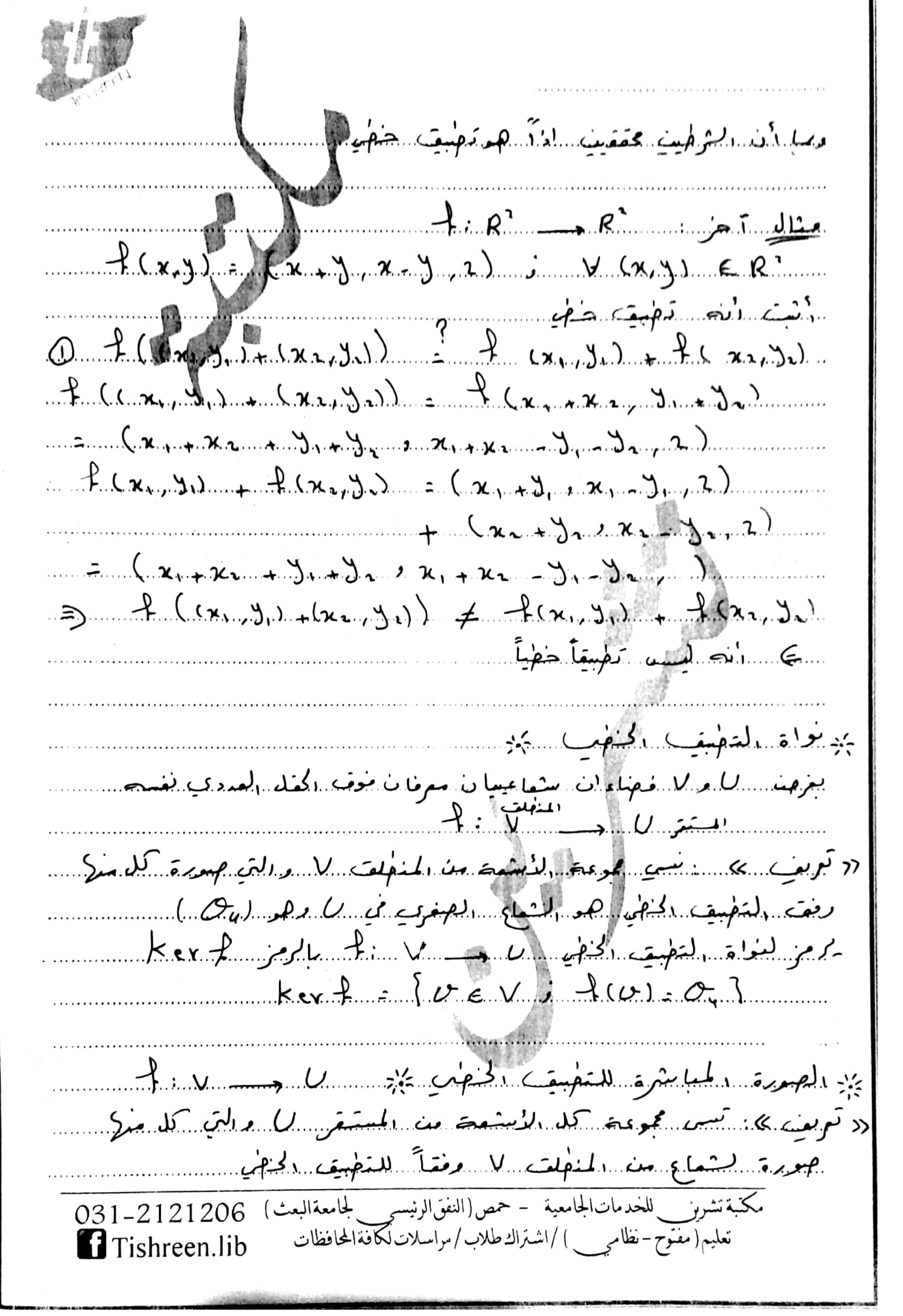
نتحقق من صحة الشرط الثاني

② $f(\alpha(x,y)) \overset{?}{=} \alpha . f(x,y)$

$f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x+\alpha y \, , \, \alpha x-\alpha y \, , \, \alpha 2x)$

$\alpha . f(x,y) = \alpha(x+y, x-y, 2x) = (\alpha x+\alpha y \, , \, \alpha x-\alpha y \, , \, \alpha 2x)$

$\Rightarrow f(\alpha(x,y)) = \alpha . f(x,y)$



وبما أن الشرطين محققين اذاً هو تطبيق خطي

مثال آخر: $f: R^2 \longrightarrow R^3$

$f(x,y) = (x+y, x-y, 2) \quad ; \quad \forall (x,y) \in R^2$

أثبت أنه تطبيق خطي

① $f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \overset{?}{=} f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2)$

$= (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2, 2)$

$f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) = (x_1+y_1, x_1-y_1, 2) + (x_2+y_2, x_2-y_2, 2)$

$= (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2, 4)$

$\Rightarrow f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \neq f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

$\Leftarrow$ انه ليس تطبيقاً خطياً

☼ نواة التطبيق الخطي ☼

بفرض U و V فضاءان شعاعيان معرفان فوق الحقل العددي نفسه

$f: V \longrightarrow U$ (المنطلق، المستقر)

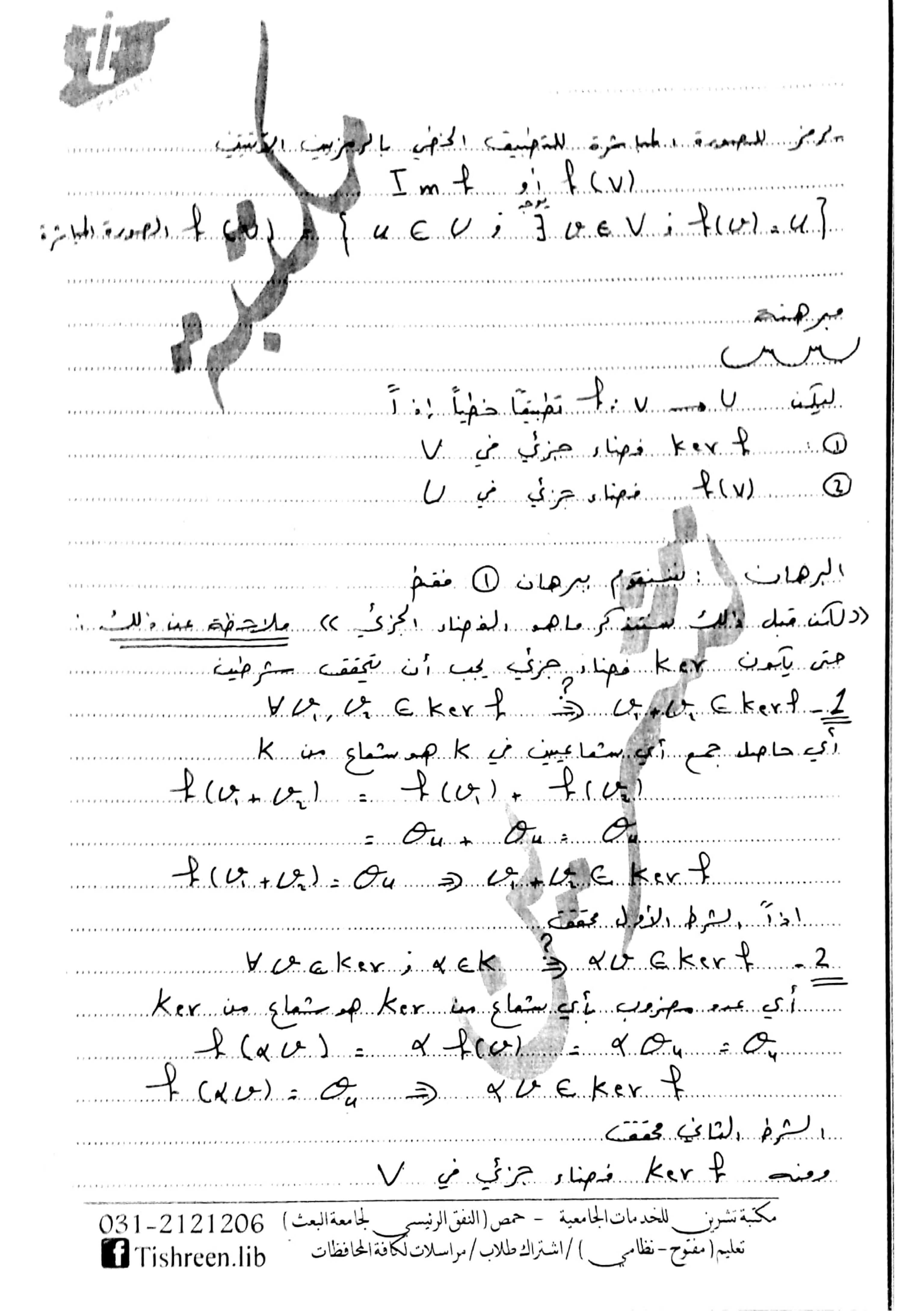
«تعريف»: نسمي مجموعة الأشعة من المنطلق V والتي صورة كل منها وفق التطبيق الخطي هو الشعاع الصفري في U وهو (O_U).

نرمز لنواة التطبيق الخطي $f: V \longrightarrow U$ بالرمز $\ker f$

$\ker f = \{ v \in V \; ; \; f(v) = O_U \}$

☼ الصورة المباشرة للتطبيق الخطي ☼ $f: V \longrightarrow U$

«تعريف»: تسمى مجموعة كل الأشعة من المستقر U والتي كل منها صورة لشعاع من المنطلق V وفقاً للتطبيق الخطي



نرمز للصورة المباشرة للتطبيق الخطي بالرمز الآتي

$Im\, f$ أو $f(V)$

الصورة المباشرة: $f(V) = \{ u \in U \,;\, \exists\, v \in V \,;\, f(v) = u \}$ (يوجد)

مبرهنة

ليكن $f : V \to U$ تطبيقاً خطياً إذاً

① $\ker f$ فضاء جزئي في V

② $f(V)$ فضاء جزئي في U

البرهان: لنقوم ببرهان ① فقط

«لكن قبل ذلك سنتذكر ماهو الفضاء الجزئي» ملاحظة عن ذلك:

حتى يكون $\ker$ فضاء جزئي يجب أن تتحقق شرطين

1- $\forall v_1, v_2 \in \ker f \overset{?}{\Rightarrow} v_1 + v_2 \in \ker f$

أي حاصل جمع أي شعاعين في K هو شعاع من K

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$
$$= 0_u + 0_u = 0_u$$

$$f(v_1 + v_2) = 0_u \Rightarrow v_1 + v_2 \in \ker f$$

اذاً الشرط الأول محقق

2- $\forall v \in \ker \,;\, \alpha \in K \overset{?}{\Rightarrow} \alpha v \in \ker f$

أي عدد مضروب بأي شعاع من $\ker$ هو شعاع من $\ker$

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha\, 0_u = 0_u$$

$$f(\alpha v) = 0_u \Rightarrow \alpha v \in \ker f$$

اذاً الشرط الثاني محقق

ومنه $\ker f$ فضاء جزئي في V

مبرهنة

ليكن $f : V \to U$ تطبيقاً خطياً بفرض أن الأشعة $v_1, v_2 \dots v_n$

تولد V فإن $f(v_1), f(v_2) \dots f(v_n)$ تولد $f(V)$

البرهان :

$\forall u \in f(V) \Rightarrow \exists v \in V ; u = f(v)$ (يوجد)

$v \in V \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \dots \alpha_n v_n$

$\Rightarrow f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \dots \alpha_n f(v_n)$

$u = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \dots \alpha_n f(v_n)$

ما يعني أن $f(v_1), f(v_2) \dots f(v_n)$ تولد $f(V)$

مبرهنة دون برهان ☺

ليكن $f : V \to U$ تطبيقاً خطياً

$$d(V) = d(\ker f) + d(f(V))$$

حيث $d(\ker f)$ هو قياس نواة التطبيق الخطي

و $d(f(V))$ قياس نواة التطبيق الخطي

« انتهت المحاضرة الثالثة »

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح »

« إعداد : فاطمة الشمسيني »